Ejercicio 1A del Modelo 6 (Extra Reserva) de 2021 (Análisis)

Calcula a, b, c y d sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto de inflexión en (0, 4) y su recta normal en el punto (1, 8) es paralela al eje de ordenadas.

Solución

Tenemos $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$.

Como tiene un punto de inflexión en (0, 4), sabemos que $f''(0) = 0$ y como punto $f(0) = 4$.

Como su recta normal en el punto (1, 8) es paralela al eje de ordenadas, x = k, resulta que $f'(1) = 0$, porque la ecuación de la recta normal es "$y - 8 = (-1/(f'(1))\cdot(x - 1)$, y si es de la forma x= 1 necesariamente $f'(1)= 0$, además como punto $f(1) = 8$.

De $f''(0) = 0$, tenemos $f''(0) = 0 + 2b = 0$, por tanto **b = 0**.
De $f'(1) = 0$, tenemos $f'(1) = 3a(1)^2 + 2(0) + c = 0$, por tanto **3a + c = 0**.
De $f(0) = 4$, tenemos $f(0) = 0 + 0 + 0 + d = 4$, de donde **d = 4**.
De $f(1) = 8$, tenemos $f(1) = a(1)^3 + (0)\cdot(1)^2 + c(1) + 4 = 8$, por tanto **a + c = 4**.
De esta ecuación tenemos a = 4 - c, y entrando en la ecuación 3a + c = 0, resulta $3(4-c) + c = 0 \to$
$\to -2c = -12 \to$ **c = 6,** con lo cual **a =** 4 – 6 **= -2.**
Los números encontrados son a = -2, b = 0, c = 6 y d = 4.

La función es $f(x) = -2x^3 + 6x + 4$.

Ejercicio 2A del Modelo 6 (Extra Reserva) de 2021 (Análisis)

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3}$ (para $x \neq -3$, $x \neq 1$).

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. (1'25 puntos)
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. (1'25 puntos)

Solución

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3}$ (para $x \neq -3$, $x \neq 1$).

a)
Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. (1'25 puntos)

x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a+} [(f(x)] = \infty$.

De $x^2 + 2x – 3 = 0 \to x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$ de donde x = -3 y x = 1, posibles asíntotas verticales.

Como $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$; la recta **x = -3 es una A.V. de la gráfica de f(x).**

Posición relativa $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$.

Como $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{-9}{0^-} = +\infty$; la recta **x = 1 es una A.V. de la gráfica de f(x).**

Posición relativa $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{-9}{0^+} = -\infty$.

Como la función f es un cociente de funciones polinómicas, con el igual grado del numerador que del denominador, f(x) tiene una asíntota horizontal (A.H.) de la forma y = b con $b = \lim_{x\to\infty} f(x)$, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$. Como hay A.H. en $\pm\infty$, f no tiene asíntotas oblicuas (A.O.) en $\pm\infty$.

Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} (1) = 1$, **la recta y = 1 es una asíntota horizontal de f(x) en $\pm\infty$** .

Como $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} - 1 \right) = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.H. en $+\infty$ (le damos a x el valor + 100)

Como $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3} - 1 \right) = 0^+$, f(x) está por encima de la A.H. en $-\infty$ (le damos a x el valor - 100)

Si hay es este caso A.H **no hay asíntotas oblicuas (A.O.)**
b)
Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f ‘(x)

$$f(x) = \frac{x^2 - 10}{x^2 + 2x - 3};\ f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2 + 2x - 3) - (x^2 - 10)\cdot(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{2x^2 + 14x + 20}{(x^2 + 2x - 3)^2}.$$

Si f ‘(x) = 0 → $2x^2 + 14x + 20 = 0 = x^2 + 7x + 10 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2}$ de donde x = -5 y x = -2, que serán los posibles extremos relativos.

Como f ‘(-6) = 8/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-∞, -5).**

Como f ‘(-3’5) = (-4’5)/(+) < 0, **luego f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-5, -3) - {-3}.**

Como f ‘(0) = (20)/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-2, +∞) - {1}**.

Por definición en x = -5) hay un máximo relativo que vale f(-5) = 15/12 = 1’25.
Por definición en x = - 2 hay un mínimo relativo que vale f(-2) = -6/(-3) = 2.

Ejercicio 3A del Modelo 6 (Extra Reserva) de 2021 (Análisis)

Considera la función f : R → R definida por $f(x) = e^x$.
a) Calcula a para que la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)) pase por el origen de coordenadas. (1’25 puntos)
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente a la misma en el punto (1, f(1)) y el eje de ordenadas. (1’25 puntos)

Solución

Considera la función f : R → R definida por $f(x) = e^x$.
a)
Calcula a para que la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)) pase por el origen de coordenadas.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = a es “y - f(a) = f ’(a)·(x - a)”.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$; $f(a) = f'(a) = e^a$.

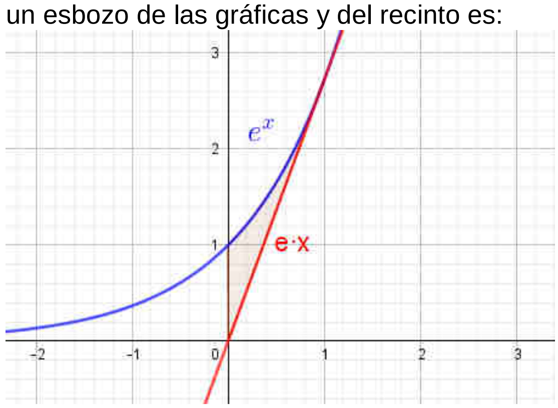
La recta tangente en x = a es: $y - e^a = e^a\cdot(x - a)$. Como pasa por (0, 0) tenemos $0 - e^a = e^a\cdot(0 - a)$, de donde $a\cdot e^a - e^a = 0 = e^a\cdot(a - 1)$, con lo cual **a = 1** porque $e^a > 0$.
b)
Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente a la misma en el punto (1, f(1)) y el eje de ordenadas.

La recta tangente en x = 1 es: $y - e^1 = e^1\cdot(x - 1)$ de donde **y = e·x**, que es una recta y pasa por (0, 0) y (1, e)

El corte de e^x con e·x es $e^x = e\cdot x$ que vemos tiene solución en x = 1.

La gráfica de e^x es conocida, siempre es creciente, positiva (encima del eje OX), pasa por (0, 1) y (1, e) y tiene y = 0 como asíntota horizontal en -∞.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas y del recinto es:



Área = $\int_0^1 \left(e^x - e\cdot x\right)dx = \left[e^x - \frac{e\cdot x^2}{2}\right]_0^1$ = $(e^1 - e/2) - (e^0 - 0)$ u^2 **= (e/2 - 1) $u^2 \cong$ 0'359 u^2.**

Ejercicio 4A del Modelo 6 (Extra Reserva) de 2021 (Análisis)

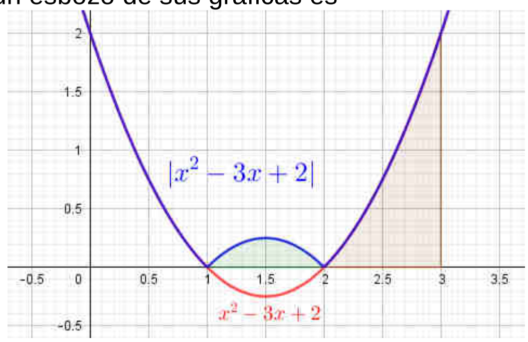
Calcula $\int_1^3 |x^2 - 3x + 2|dx$.

Solución

Hacemos primero un esbozo de la gráfica de $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.
Tenemos $f(x) = |x^2 - 3x + 2| = |h(x)|$.

Dibujamos primero la gráfica de $h(x) = x^2 - 3x + 2$, que es la de una parábola con las ramas hacia arriba $\cup$ (el nº que multiplica a x^2 es positivo), con abscisa del vértice en el número que anula la 1ª derivada, es decir $h'(x) = 2x - 3 = 0$, de donde $x = 3/2 = 1'5$ y el vértice es $V(1'5, h(1'5)) = V(1'5,-0'25)$, que es el mínimo de la parábola; puntos de corte en (0, 2), y de $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ de donde x = 1 y x = 2 por tanto corta en (1, 0) y (2, 0).

Recordamos que la gráfica del valor absoluto |h(x)| es la misma que la de h(x), si $h(x) \geq 0$ (la gráfica está por encima del eje de abscisas OX), y simétrica respecto al eje OX, es decir gráfica de – h(x), si h(x) < 0 (la gráfica está por debajo del eje de abscisas OX).
Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de sus gráficas es



Tenemos $f(x) = |x^2 – 4| = f(x) = |x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ -(x^2 - 3x + 2) & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$, por tanto la integral pedida es:

I = $\int_1^3 |x^2 - 3x + 2|dx$ **=** $\int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2)dx$ **=** $[-x^3/3 + 3x^2/2 - 2x]_1^2 + [x^3/3 - 3x^2/2 + 2x]_2^3$ =
= [(-8/3 + 6 - 4) - (-1/3 + 3/2 - 2)] + [(9 - 27/2 + 6) - (8/3 - 6 + 4)] **= 1/6 + 5/6 = 1.**

Ejercicio 5B del Modelo 6 (Extra Reserva) de 2021 (Álgebra)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 5.

a) Calcula razonadamente el determinante de $2A^3$. (0'5 puntos)

b) Calcula razonadamente los determinantes $\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & 1/2 & 3 \\ 2c & -1/2 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$. (2 puntos)

Solución

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 5.

(a)
Calcula razonadamente el determinante de $2A^3$.

$|2\cdot A^3| = \{i \text{ y } v\} = |2\cdot A\cdot A\cdot A| = (2)^3\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A|$ **= 8·5·5·5 = 1000**.

b) Calcula razonadamente los determinantes $\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & 1/2 & 3 \\ 2c & -1/2 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$.

Tenemos $\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & 1/2 & 3 \\ 2c & -1/2 & 3 \end{vmatrix}$ = (iii) = $2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ b & 1/2 & 1 \\ c & -1/2 & 1 \end{vmatrix}$ = (iii) = $3\cdot\begin{vmatrix} a & -2 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix}$ = (iii) = $3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **= -3·5 = -15**.

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \{iv\} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{ii\} = \begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ b & -2 & 1 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{iii\} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **= 2·5 = 10**.

Propiedades usadas:
(i) Sabemos que $\det(k\cdot A_n) = (k)^n\cdot\det(A_n)$.
(ii) Sabemos que $\det(A) = \det(A^t)$.
(iii) Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.
(iv) Si una fila (columna) de un determinante se le suma otra fila (columna) multiplicada por cualquier número, el determinante no varía.
(v) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.
(vi) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
(vii) Si intercambiamos dos filas (columnas) de un determinante, el determinante cambia de signo.

Ejercicio 6B del Modelo 6 (Extra Reserva) de 2021 (Álgebra)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my + mz = 1 \\ x + 2my + (m+1)z = 1 \\ 2x + my + mz = 2 \end{cases}$.

a) Discute el sistema según los valores de m. (1'75 puntos)
b) Resuelve el sistema, si es posible, para m = 1. (0'75 puntos)

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my + mz = 1 \\ x + 2my + (m+1)z = 1 \\ 2x + my + mz = 2 \end{cases}$.

(a)
Discute el sistema según los valores de m.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 2m & m+1 \\ 2 & m & m \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m & 1 \\ 1 & 2m & m+1 & 1 \\ 2 & m & m & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 2m & m+1 \\ 2 & m & m \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (1)(m - m^2) = m\cdot(1 - m)$.

Si |A| = 0, tenemos $m\cdot(1 - m) = 0$, de donde m = 0 y m = 1.

Si **m ≠ 0 y m ≠ 1**, det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **m = 0,** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ por tener dos filas proporcionales, rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2 < número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene**

más de una solución (infinitas).

Si **m = 1,** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = por tener dos columnas proporcionales, rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2 < número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas).**

(b)

Resuelve el sistema, si es posible, para m = 1.

Hemos visto en el apartado anterior que si **m = 1**, rango(A) = rango(A^*) = 2, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 3ª).

$x + y + z = 1 \quad \rightarrow \quad x + y + z = 1$

$2x + y + z = 2.\ F_2 - 2F_1 \quad \rightarrow$ **x = 1**. Tomo **z = b** $\in$ R, entrando en la 1ª tenemos **y = -b.**

Solución (x, y, z) = (1, -b, b) con b $\in$ R.

Ejercicio 7B del Modelo 6 (Extra Reserva) de 2021 (Geometría)

Considera el punto P(1, 2, 6) y el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$.

a) Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π cuya distancia a éste sea $\sqrt{(6)}$ unidades. (1'25 puntos)

b) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π. (1'25 puntos)

Solución

Considera el punto P(1, 2, 6) y el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$.

(a)

Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π cuya distancia a éste sea $\sqrt{(6)}$ unidades. (1'25 puntos)

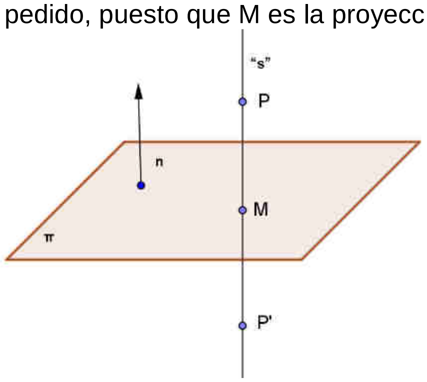
Los planos paralelos a π son de la forma $\pi_K \equiv 2x - y + z + K = 0$.

Como la distancia entre ellos es $\sqrt{(6)}$ resulta $d(\pi_1; \pi_2) = \sqrt{(6)} = d(A; \pi) = \dfrac{|K|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|K|}{\sqrt{6}}$ u^1, **de donde tenemos |K| = 6 con lo cual nos resulta K = -6 y K = 6 y los planos pedidos son $\pi_1 \equiv 2x - y + z - 6 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + z + 6 = 0$**

(b)

Halla el simétrico del punto P(1, 2, 6) respecto al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$.

Calculamos la recta "s" perpendicular ($\perp$), al plano π (el vector director **u** = (2, -1, 1) de la recta "s" es el vector normal **n** del plano π) por el punto P(1, 2, 6). Determinamos $M = s \cap \pi$, y M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido, puesto que M es la proyección ortogonal de P sobre π.



s(P; **u**) = s(P; **n**) con P(1, 2, 6) y **n** = (2,-1, 1).

Su ecuación vectorial es s ≡ (x, y, z) = (1 + 2b, 2 - b, 6 + b) con b ∈ R.
M = s∩π, sustituimos la ecuación de la recta en el plano y obtenemos el parámetro “b”, y luego el punto M.
→ 2(1 + 2b) - (2 - b) + (6 + b) = 0 = 6b + 6 = 0, de donde b = -1, y el punto M es
M(1 + 2(-1), 2 - (-1), 6 + (-1)) = M(-1, 3, 5).

M es el punto medio del segmento PP’, donde P’ es el simétrico pedido.
(-1, 3, 5) = ((1 + x)/2,(2 + y)/2,(6 + z)/2), de donde x = -2 - 1 = -3, y = 6 - 2 = 4, z = 10 - 6 = 4.

El simétrico pedido es P’(-3, 4, 4).

Ejercicio 8B del Modelo 6 (Extra Reserva) de 2021 (Geometría)

Considera los puntos B(-1, 0, -1), C(0, 1, -3) y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \quad -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

a) Calcula un punto que esté en r y equidiste de B y C. (1’25 puntos)
b) Siendo D(1, -1, -2), calcula el área del triángulo con vértices en los puntos B, C y D. (1’25 puntos)

Solución

Considera los puntos B(-1, 0, -1), C(0, 1, -3) y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \quad -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

(a)
Calcula un punto que esté en r y equidiste de B y C.

Un punto genérico de “r” es D(-λ, 1 + 2λ, -1 + λ), me están pidiendo el punto D tal que d(B,D) = d(C,D), es decir ||**BD**|| = ||**CD**||.

Tenemos **BD** = (1 - λ, 1 + 2λ, λ). Análogamente **CD** = (-λ, 2λ, 2 + λ).

||**BD**|| = $\sqrt{(1-\lambda)^2 + (1+2\lambda)^2 + (\lambda)^2} = \sqrt{6\lambda^2 + 2\lambda + 2}$. ||**CD**|| = $\sqrt{(\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (2+\lambda)^2} = \sqrt{6\lambda^2 + 4\lambda + 4}$.
Igualando ||**AC**|| = ||**BC**|| y elevando al cuadrado tenemos $6\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 6\lambda^2 + 4\lambda + 4$, de donde resulta
0 = 2λ + 2, es decir λ = -1, **y el punto de r que equidista de los puntos A y B es:**
D(-(-1), 1 + 2(-1), -1 + (-1)) = D(1, -1, -2).
(b)
Siendo D(1, -1, -2), calcula el área del triángulo con vértices en los puntos B, C y D.

Sabemos que el área de un triángulo BCD es (1/2) del área del paralelogramo que determinan dos vectores con origen común, en nuestro caso el **BC** = (1, 1, -2) y **BD** = (2, -1, -1). También sabemos que el área de un paralelogramo es el módulo (|| ||) del producto vectorial (x) que determinan dichos vectores (||**BCxBD||).**

BC = (1, 1, -2); **BD** = (2, -1, -1).; **BCxBD**= $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ Adjunto primera fila = **i**(-1-2) - **j**(-1+4)+**k**(-1-2) = (-3, -3, -3)

Área triángulo BCD = (1/2).||**BCxBD||** = (1/2)·√($3^2+3^2+3^2$) **= (1/2)·√(27) u^2. ≅ 2’598 u^2.**